

- ① wir haben $p \in (0,1) \subseteq [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ $k \leq n$
 $\Rightarrow$ Binomialverteilung:

$$b(k, n; p) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Gesucht: ~~h~~ n mit $b(k, n; p)$ maximal

Seite 7 Skript: $b(k, n; p)$ maximal für $k = \lfloor p(n+1) \rfloor$

$$\Rightarrow n = \left\lceil \frac{k}{p} \right\rceil \quad (\text{wobei für } n \leq k \text{ stattdessen } n = k \text{ gilt})$$

$\leftarrow$ 1 fehlt wegen ganzem Teil $\leftarrow$ das versteht ich

② $IP(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =: p_k$
 $IP(Y=j) = \binom{m}{j} p^j (1-p)^{m-j} =: q_j$

X, Y unabh.

$$\Rightarrow IP(X+Y=l) = p_0 q_l + p_1 q_{l-1} + \dots + p_{l-1} q_1 + p_l q_0$$

1	2	3	4	Σ
3	3	4	2	12/16

$$= \sum_{k=1}^l \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{m}{l-k} p^{l-k} (1-p)^{m-l+k}$$

$\uparrow$ $(j=l-k)$

$$= \left(\sum_{k=1}^l \binom{n}{k} \binom{m}{l-k} \right) p^l (1-p)^{n+m-l}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^l \binom{n}{k} \binom{n+m-l}{l-k} \right) p^l (1-p)^{n+m-l}$$

$$= \binom{n+m}{l} p^l (1-p)^{n+m-l}$$

genauer - 1? $\rightarrow$ Binomialsatz

(Skript S. 61)

$$= b(l, n+m; p)$$

Also ist $X+Y$ $b(\cdot, n+m; p)$ -verteilt

3/4

③ $P(h; 2) = \frac{2^h}{h!} e^{-2}$ (Berechnung wie in Aufgabe 2)

$$IP(\text{mehr als 2 Karten}) = 1 - IP(0, 1, \text{ oder } 2 \text{ Karten})$$

$$\Rightarrow IP(\sum \text{Karten} \geq 3) = 1 - (P(0; 2.1) + P(1; 2.1) + P(2; 2.1))$$

$$= 1 - (p_0 q_0 + p_0 q_1 + p_1 q_0 + p_0 q_2 + p_1 q_1 + p_2 q_0)$$

wobei $p_k = P(k; 2.1)$ $q_j = P(j; 2.8)$

$$\Rightarrow P = 1 - \left(1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 8 + \frac{2 \cdot 8^2}{2} + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 8 + \frac{2 \cdot 1^2}{2} \right) e^{-2 \cdot 1 - 2 \cdot 8}$$

$$= 1 - 17,804 e^{-4.8} = 0,86669 \quad \checkmark$$

Also ist die Wahrscheinlichkeit mindestens 3 Karten zu bekommen ^{etwa} 86,7%. $\checkmark$ 4/4

④

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b(k, n; p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k - a_k n^{k-1} - b_k n^{k-2} - \dots - z_k}{k!} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

wobei $a_k, b_k, \dots, z_k$ die Faktoren sind, die beim ausmultiplizieren des von $n(n-1) \dots (n-k+1)$ entstehen. Diese sind nur von k nicht aber von n abhängig

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a_k \frac{1}{n} - b_k \frac{1}{n^2} - \dots - z_k \frac{1}{n^k}}{k!} (n p_n)^k \frac{(1-p_n)^n}{(1-p_n)^k}$$

$$\stackrel{\text{sofern die Limes alle existieren, was sie tun}}{=} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a_k \frac{1}{n} - b_k \frac{1}{n^2} - \dots - z_k \frac{1}{n^k}}{k!} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (n p_n)^k \right) \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1-p_n)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1-p_n)^k}$$

$$= \frac{1}{k!} \cdot 2^k \cdot \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{n})^n}{1}$$

$$= \frac{2^k}{k!} e^{-2}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x \quad \forall x$

2/4